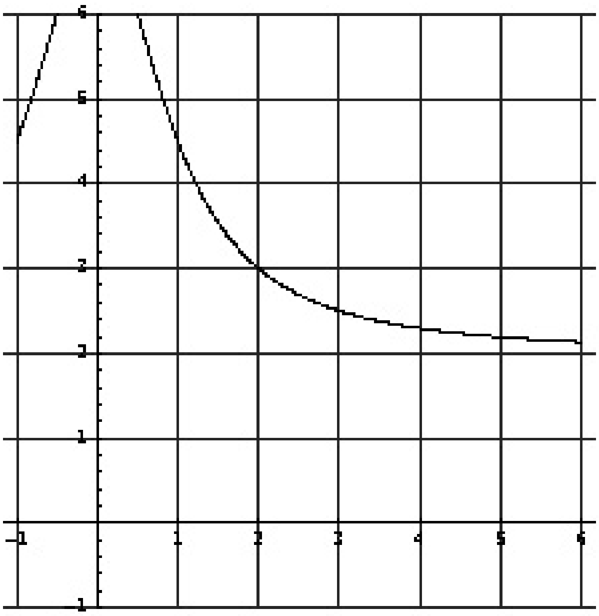
Capítulo 9

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

9.1. Introducción

El concepto de límite en Matemáticas tiene el sentido de "lugar" hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito.

Veamos un ejemplo: Consideremos la función dada por la gráfica de la figura y fijémonos en el punto $x = 2$ situado en el eje de abscisas:



¿Qué ocurre cuando nos acercamos al punto 2 moviéndonos sobre el eje x? Tomemos algunos valores como 2'1, 2'01, 2'001.

Vemos en la figura que en este caso las imágenes de dichos puntos sobre la curva, f(2'1), f(2'01), f(2'001) se acercan a su vez a un valor situado en el eje y, el valor $y = 3$.

Si nos acercamos a 2 por la otra parte, es decir, con valores como 1'9, 1'99, 1'999 en este caso las imágenes f(1'9), f(1'99), f(1'999) se acercan también al mismo valor, $y = 3$.

Concluimos que el límite de la función f(x) cuando nos acercamos a $x = 2$ es 3, lo cuál expresamos como:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Intuitivamente, por tanto, podemos decir que el límite de una función en un punto es el valor en el eje Oy al que se acerca la función, $f(x)$, cuando la x se acerca, en el eje Ox a dicho punto.

Sin embargo la expresión matemática rigurosa de límite es algo más compleja:

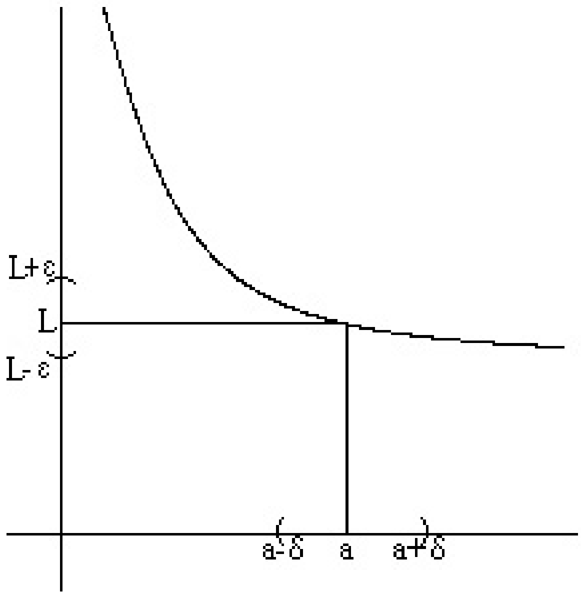
Definición: Dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a es L, y se expresa como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

cuando:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que siempre que } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Lo que viene a expresar esta formulación matemática es que si x está “suficientemente cerca” de a, entonces su imagen f(x) también está muy próxima a L.



En la práctica en muchas ocasiones es necesario calcular los llamados límites laterales, que como recordaremos se definen de la siguiente forma:

Definición:
Se define el *límite lateral por la derecha* de a de la función $f(x)$, y se expresa como:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

al límite al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y toma valores mayores que a.
De igual modo, el *límite lateral por la izquierda* de a de la función $f(x)$ se expresa como:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y se define como el límite al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y toma valores menores que a.

Propiedad: Para que una función $f(x)$ tenga límite en $x = a$ es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan, es decir:

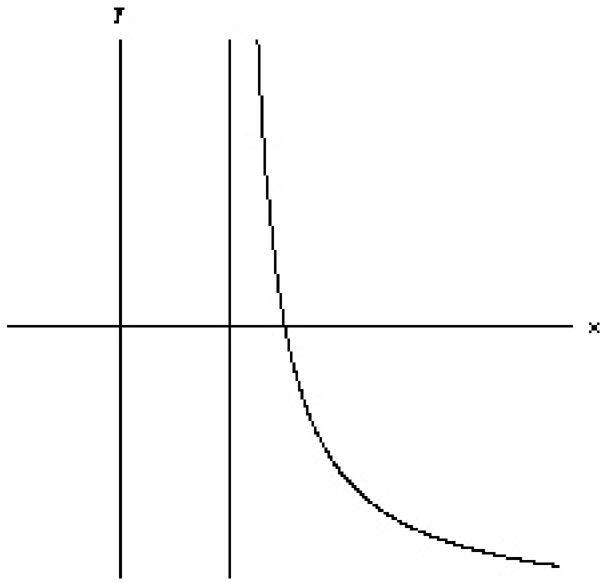
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

9.2. Tipos de límites

Recordaremos algunos tipos de límites que son conocidos:

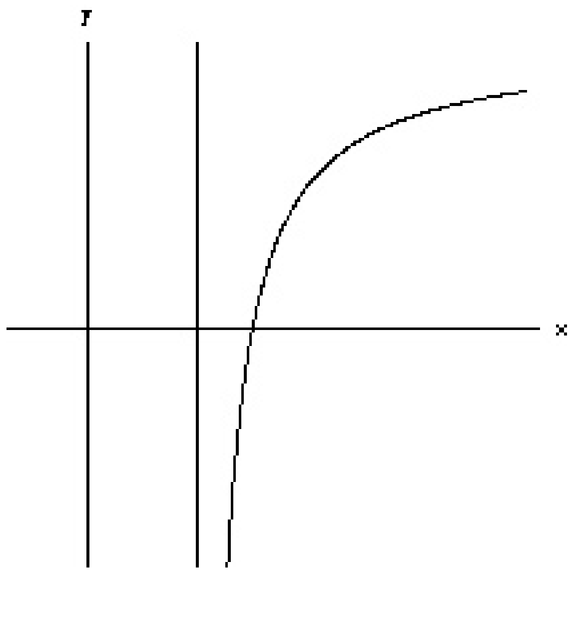
1. *Límites infinitos en un punto finito:* En la situación del dibujo, se dice que el límite cuando x se acerca por la derecha de a es $+\infty$, pués a medida que la x se acerca a a, la función se hace cada vez mayor:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

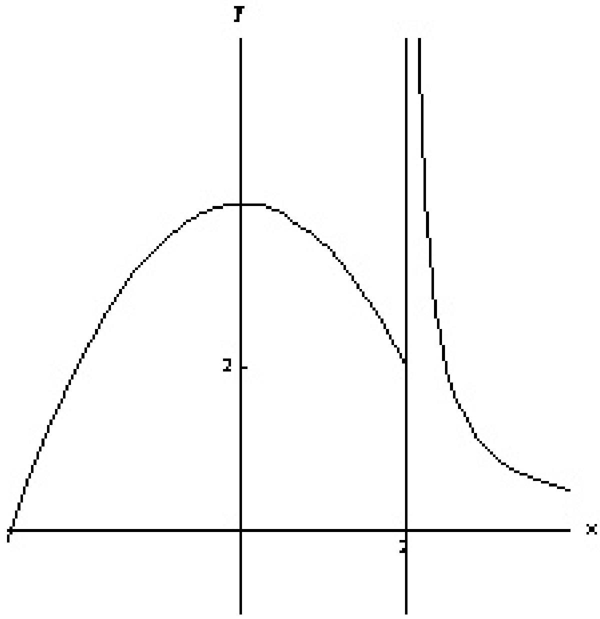


(de igual forma se puede definir cuando nos acercamos por la izquierda. Intenta hacer el dibujo).

De igual modo se define el límite $-\infty$ cuando nos acercamos a a (por la derecha o por la izquierda).(Dibuja el que falta)



Puede ocurrir que uno de los límites laterales sea finito y otro infinito, o cualquier combinación entre ellos, por ejemplo:



En la figura anterior se cumple que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

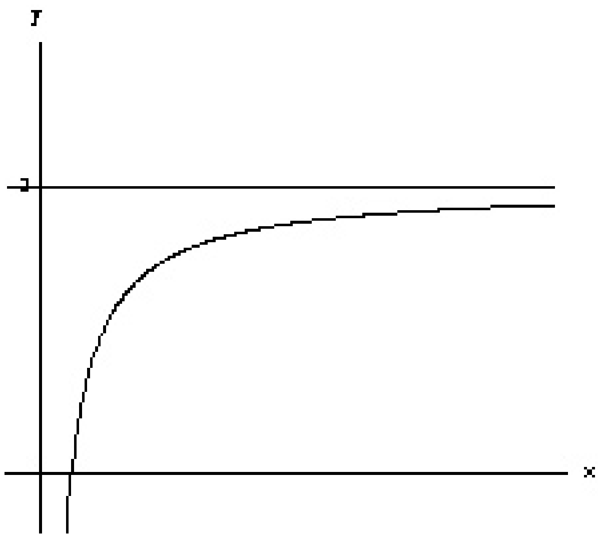
y

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

2. *Límites finitos en el infinito:* Se dice que una función tiene límite b cuando x tiende a $+\infty$ cuando la función se acerca a b cuando la x se hace cada vez mayor, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Gráficamente:

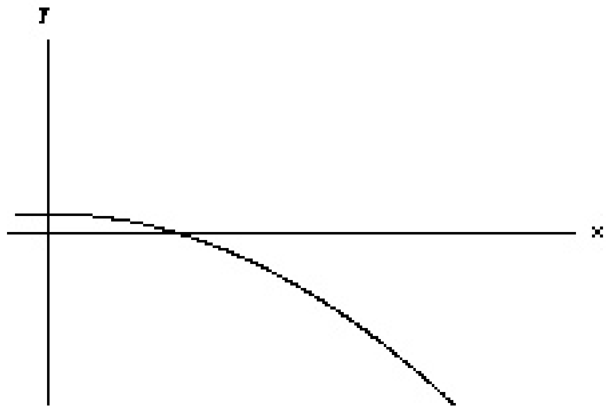


En este caso el límite es 2 cuando x tiende a $+\infty$.

De igual modo se define el límite finito cuando x tiende a $-\infty$.

3. *Límites infinitos en el infinito:* Aparece este caso cuando si x tiende a $+\infty$ la función se hace cada vez mayor o menor (lo mismo si x tiende a $-\infty$).

   Un ejemplo gráfico de este tipo de límites sería:

   En este caso:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

   (Intenta dibujar otros casos diferentes).

9.3. Cálculo de límites

Recordaremos, dada su importancia, algunas de las reglas para el cálculo de límites cuando se presentan diferentes indeterminaciones:

9.3.1. Límites en el infinito

1. *Límites de polinomios:* El límite de cualquier polinomio cuando x tiende a ∞ siempre es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del coeficiente del término de mayor grado del polinomio:

   $$\lim_{x\to\infty}(2x^5 - 3x^2 + 5) = +\infty$$

   $$\lim_{x\to\infty}(-3x^7 - 5x^2 + 4x - 8) = -\infty$$

   pues en el primer caso el coeficiente de x^5 es positivo, y en el segundo caso el coeficiente de x^7 es negativo.

2. *Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:* Si tenemos un cociente de polinomios nos encontraremos con una indeterminación de este tipo. Para resolverla basta recordar la siguiente regla:

   Si tenemos:

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si grado(p(x))} > \text{grado(q(x))}, \\ & \text{donde el signo depende de los coeficientes.} \\ 0 & \text{si grado(p(x))} < \text{grado(q(x))} \\ \dfrac{a}{b} & \text{si grado(p(x))} = \text{grado(q(x)), siendo } a \text{ y } b \text{ los} \\ & \text{coeficientes de los términos de mayor grado de cada polinomio.} \end{cases}$$

   Ejemplos: a)

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 5x^2 + 6}{-x^2 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\infty$$

porque el grado del numerador es mayor, pero los respectivos coeficientes de mayor grado tienen signo diferente.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{x^6-x^4-3x^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

porque el grado del denominador es mayor.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+2x-6}{-3x^3+6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\frac{7}{3}$$

porque los grados son iguales.

Nota: La resolución de límites cuando x tiende a $-\infty$ se reduce a estos casos, puesto que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-5x^2+4}{-x^2+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^3-5(-x)^2+4}{-(-x)^2+5(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3-5x^2+4}{-x^2-5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$$

La misma regla anterior sirve en el caso de que aparezcan raíces, siempre que tengan sentido los límites:

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{x^3-5x}}{x^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

puesto que el grado del denominador es 2 y en el numerador la mayor potencia de x es $\frac{3}{2}$, que es menor que 2.

e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{-x+1}+x^3}{1+x+3x^3} = \nexists$$

puesto que aunque los grados de numerador y denominador son iguales, cuando x tiende a $+\infty$ (es positivo y muy grande) resulta que $-x+1$ es negativo y como es bien conocido, la raíz cuadrada de un número negativo no existe en el cuerpo de los números reales, por tanto el límite anterior no tiene sentido.

f)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x+1}+x^3}{1+x+3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{-(-x)+1}+(-x)^3}{1+(-x)+3(-x)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-x^3}{1-x-3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

pues en este caso la raíz si tiene sentido y los grados son iguales, quedando el límite el cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado.

3. *Indeterminación $\infty-\infty$:* Cuando aparece esta indeterminación, si tenemos una resta de fracciones, simplemente se hace la resta para obtener un cociente de polinomios que ya sabemos resolver:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x+1} - \frac{x+3+x^2}{x-1} = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x+3+x^2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^2-1} - \frac{x^3+2x^2+4x+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^2-2x-4}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -4$$

En caso de que aparezca una raíz, el proceso es multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión radical:

$$\lim_{x\to\infty}\left((2x-1)-\sqrt{x+1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left((2x-1)-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left((2x-1)+\sqrt{x+1}\right)}{(2x-1)+\sqrt{x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2-(\sqrt{x+1})^2}{(2x-1)+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1-x-1}{(2x-1)+\sqrt{x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x}{(2x-1)+\sqrt{x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=+\infty$$

9.3.2. Límites en puntos finitos

Si queremos calcular el límite de una función $f(x)$ cuando x se acerca a cierto valor a, simplemente hemos de sustituir el valor de a en $f(x)$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2-3x+1}{x+2}=\frac{2\cdot 9-3\cdot(-3)+1}{-3+2}=-28$$

El problema que nos podemos encontrar en este caso es que el denominador se haga 0 al sustituir x por el valor que corresponda.

Nos podemos encontrar, por tanto, varios tipos de indeterminación.

1. *Indeterminación* $\frac{k}{0}$, $(k\neq 0)$: Se presenta cuando en el numerador aparece un número cualquiera no nulo y el denominador es 0.

   En este caso el límite el siempre ∞, pero para determinar su signo, se calculan los límites laterales:

   a)
   $$\lim_{x\to1}\frac{1-2x}{1-x^2}=\frac{1-2}{1-1}=\frac{-1}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{1-x^2}=\frac{1-2\cdot1'0001}{1-(1'0001)^2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim_{x\to1^-}\frac{1-2x}{1-x^2}=\frac{1-2\cdot0'9999}{1-(0'9999)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

   b)
   $$\lim_{x\to0}\frac{-7}{x}=\frac{-7}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to0^+}\frac{-7}{x}=\frac{-7}{0'0001}=\frac{-7}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to0^-}\frac{-7}{x}=\frac{-7}{-0'0001}=\frac{-7}{0^-}=+\infty\end{cases}$$

   c)
   $$\lim_{x\to-1}\frac{-2}{(x+1)^2}=\frac{-2}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to-1^+}\frac{-2}{(x+1)^2}=\frac{-2}{(-0'9999+1)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to-1^-}\frac{-2}{(x+1)^2}=\frac{-2}{(-1'0001+1)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

2. *Indeterminación* $\frac{0}{0}$: En este caso tanto numerador como denominador se hacen 0.

   Si tanto en el numerador como en el denominador tenemos polinomios, la forma de resolver la indeterminación es descomponer los polinomios en factores (mediante, por ejemplo, la regla de Ruffini) y simplificar para posteriormente volver a sustituir.

   $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{4-10+6}{4-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{-1}{4}$$

En caso de que también aparezcan raíces cuadradas, el proceso es multiplicar y dividir por la *expresión radical conjugada* con el fin de simplificar y luego sustituir:

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{x^2+2x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -3} \frac{(\sqrt{x+4}-1)\cdot(\sqrt{x+4}+1)}{(x^2+2x-3)\cdot(\sqrt{x+4}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to -3} \frac{(\sqrt{x+4})^2-1^2}{(x^2+2x-3)\cdot(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{(x^2+2x-3)\cdot(\sqrt{x+4}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+4}+1)} = \frac{1}{(-4)\cdot(1+1)} = \frac{-1}{8}$$

9.3.3. Límites potenciales. Indeterminación 1^∞

Cuando aparecen exponentes, hay que recordar algunas reglas básicas.
Si tenemos

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)}$$

o bien

$$\lim_{x\to \infty} (f(x))^{g(x)}$$

se pueden presentar varios casos:

1. La base tiende a un número cualquiera no nulo y el exponente a otro número. En este caso el límite es el número que resulta de realizar la operación correspondiente:

$$\lim_{x\to 1} (x+1)^{2x-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

2. La base tiende a un número positivo mayor que 1 y el exponente a $+\infty$. En este caso el límite es también $+\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^{2x-3} = 2^\infty = +\infty$$

3. La base tiene a un número no nulo comprendido entre -1 y 1 y el exponente a $+\infty$. En este caso el límite es 0.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{2x+1}\right)^{2x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0$$

4. La base tiende a un número negativo menor o igual que -1 y el exponente a $+\infty$. En este caso el límite no existe, pues los productos son alternativamente de signo contrario:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-3x+1}{1+x}\right)^{2x-3} = (-3)^\infty = \nexists$$

5. En el caso en que la base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$ tenemos una indeterminación que se resuelve aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = (1^\infty) = (\mathrm{e})^{\lim_{x\to a}(g(x)\cdot(f(x)-1))}$$

O bien realizando los pasos para resolver tales límites que recordamos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2x+1}\right)^{\frac{2x+3}{x}} = (1)^{\frac{3}{0}} = (1^{\infty}) \underset{\text{se suma y se resta 1 a la base}}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x}{2x+1}-1\right)^{\frac{2x+3}{x}} \underset{\text{se hace la resta}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x-2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+3}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2x+1}\right)^{\frac{2x+3}{x}} \underset{\text{se baja el numerador dividiendo al denominador}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x}}\right)^{\frac{2x+3}{x}} \underset{\text{se pone el denominador como exponente}}{=} \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x}}\right)^{\frac{2x+1}{-x}}\right]^{\frac{-x}{2x+1}\cdot\frac{2x+3}{x}} =$$

$$\underset{\text{se sustituye el corechete por e}}{=} (\mathrm{e})^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{2x+1}\cdot\frac{2x+3}{x}\right)} = (\mathrm{e})^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2x-3}{2x+1}\right)} = \mathrm{e}^{-3}$$

Ejercicio: Resolver el límite anterior utilizando la fórmula.

Nota: El caso en que el exponente tiende a $-\infty$ se reduce a este sin más que recordar las propiedades de las potencias:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

9.4. Asíntotas

Una primera aplicación del cálculo de límites consiste en el cálculo de las asíntotas de una función. Hay tres tipos de asíntotas:

Verticales, Horizontales y Oblicuas (aunque de hecho las asíntotas horizontales son un caso particular de éstas).

9.4.1. Asíntotas verticales

Una asíntota vertical de una función $f(x)$ es una recta vertical $x = k$ tal que se cumple:

$$\lim_{x\to k^{+}} f(x) = \pm\infty$$

o bien

$$\lim_{x\to k^{-}} f(x) = \pm\infty$$

Las posibles asíntotas verticales de una función se encuentran entre los puntos que no están en el dominio de la función, aquellos que anulan el dominador en las funciones racionales, etc...

Para determinar si un punto constituye una asíntota vertical de la función, se tiene que cumplir que alguno de los límites laterales de la función en el punto sea $\pm\infty$.

En tal caso, se dirá que la función posee una asíntota vertical en dicho punto por el lado en el cuál dicho límite sea $\pm\infty$.

Ejemplo: Estudiar las asíntotas verticales de las funciones:

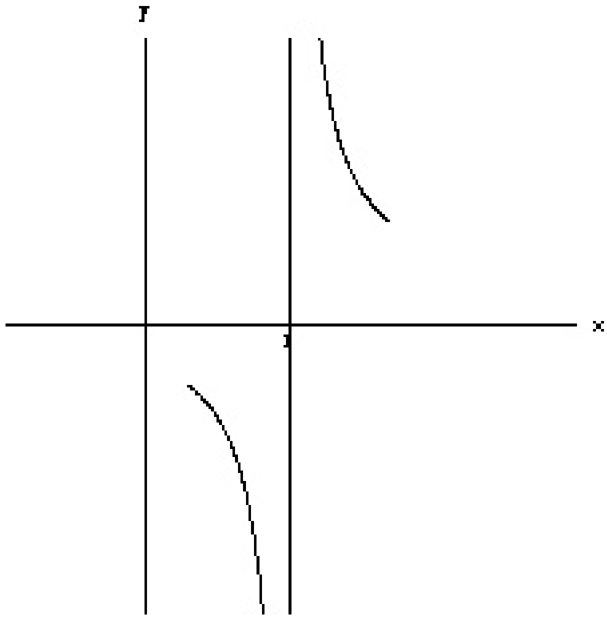
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a) Para la primera función, la posible asíntota estará en el punto $x = 1$, que es el único número real que no pertenece a su domino por anular el denominador.

Así pues estudiamos el:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1} = \frac{5}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{2\cdot 1'0001+3}{1'0001-1} = \dfrac{5}{0^{+}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{2\cdot 0'9999+3}{0'9999-1} = \dfrac{5}{0^{-}} = -\infty \end{cases}$$

Como ambos límites laterales son infinitos, existe una asíntota vertical de la función en $x = 1$, y es más, conociendo el valor de los límites podemos asegurar que en las cercanías de la asíntota la función se comportará como en el dibujo:

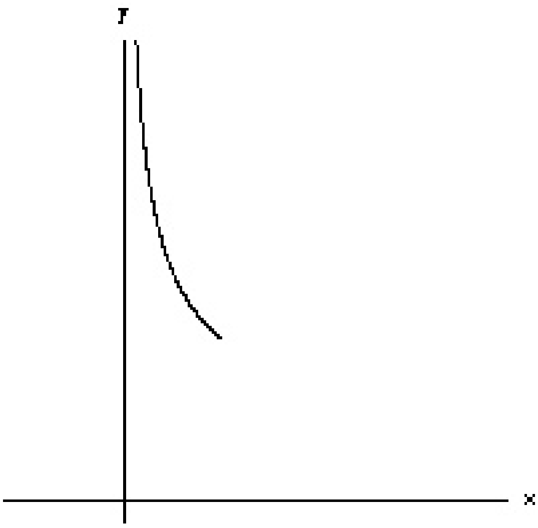


b) En cuanto a esta función, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, notemos que el denominador se anula cuando $\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$, es decir la posible asíntota vertical estará en $x = 0$. Analizando obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{0'0001}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{-0'0001}} = \nexists \end{cases}$$

puesto que no hay raíces cuadradas de números negativos.

De modo que hay una asíntota vertical en $x = 0$ pero sólo por la derecha, es decir, la gráfica será:



9.4.2. Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales, si existen, indican el valor al que se acerca la función cuando la variable independiente x se hace muy grande o muy pequeña.

Dicho en forma de límites, una función tiene una asíntota horizontal en $y = k$ cuando para alguno de los dos límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$$

o bien

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

Ejemplo: Calcular las asíntotas horizontales de las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a) Para $f(x)$ calculemos los límites anteriores:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+1}{(-x)+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{-x+1} = -\infty$$

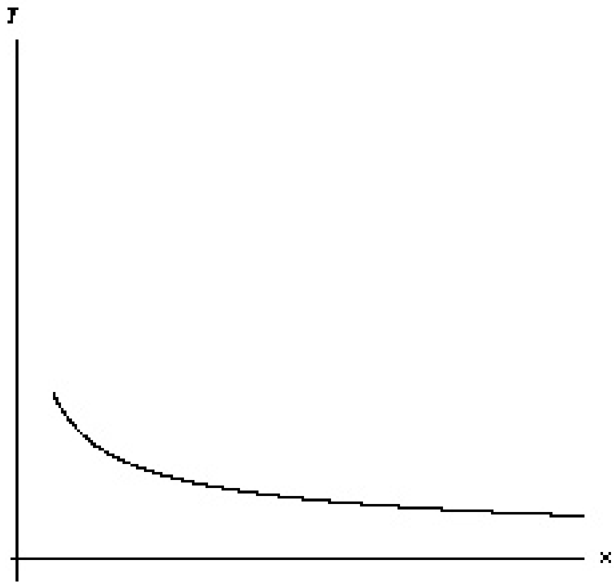
de modo que la función f(x) no posee asíntotas horizontales.

b) En cuanto a $g(x)$, de igual modo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \nexists$$

De modo que $g(x)$ posee una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando x tiende a ∞. De forma gráfica:



9.4.3. Asíntotas Oblicuas

Una recta $y = m \cdot x + n$ es una asíntota oblicua de la función f(x) cuando existen y son finitos los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

y

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - m \cdot x\right)$$

Las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas para el caso en que $m = 0$.

Ejemplo: Estudiar las asíntotas oblicuas de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Calculemos m y n:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - m\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right) = -1$$

Por tanto $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x - 1$ cuando x tiende a $+\infty$.

Se puede comprobar que cuando x tiende a $-\infty$, $f(x)$ tiene esta misma asíntota. (Inténtalo).

Gráficamente se obtiene:

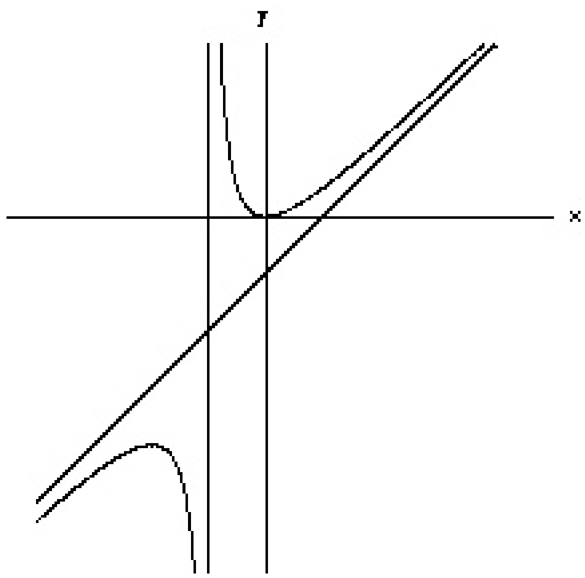


Figura 9.1: La asíntota oblicua es $y = x - 1$

Ejercicios:

1. Calcula las asíntotas de las funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x+2} \qquad h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

2. Estudia las asíntotas de la función:$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

3. Calcula los límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}} \qquad e)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3} \qquad f)\ \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$$

9.5. Continuidad

La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla.

Una función continua en un punto es aquella que no "da saltos", aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Matemáticamente la definición de función continua es un poco más compleja. Dice así:

Definición: Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que siempre que } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Dicho de otra forma, si nos acercamos al punto a, entonces las imágenes se acercan a la imagen de a, $f(a)$.

Si $f(x)$ no es continua en $x = a$ se dice que $f(x)$ es discontinua en a o que tiene una discontinuidad en $x = a$.

Propiedad: Para que una función sea continua en un punto a es necesario y suficiente que:

a) Exista el valor de la función en el punto, $f(a)$.

b) Existan los límites laterales,

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

y

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

, y sean finitos e iguales entre sí e iguales a $f(a)$, es decir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Esta última propiedad proporciona una forma muy sencilla de saber si una función es continua o no en un punto.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x > 2 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x \le 2 \end{cases}$$

En primer lugar, señalemos que la mayoría de las funciones que estudiamos son continuas en todos los puntos salvo en algunos.

¿Cuáles son los posibles puntos de discontinuidad de una función?.

Aquellos en los que no está definida la función (anulan el denominador, etc...) y aquellos en los que cambia la definición de la función.

En todos los demás puntos las funciones son siempre continuas y no hace falta analizarlos.

En nuestro caso, si nos fijamos en $f(x)$ encontramos 2 posibles puntos de discontinuidad.

El primero es aquel en el que cambia la definición de la función, $x = 2$. Además, como hay un demominador, que se anula para $x = 0$, y además estamos en el tramo de función para valores menores que 2, el punto $x = 0$ es otro posible punto de discontinuidad.

Analicemos si la función es continua o no en esos puntos.

Continuidad en $x = 2$:

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

pues debemos sustituir en la parte inferior de $f(x)$, que es donde está el igual.

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} 2x + 1 = 5$$

Como los límites laterales existen pero son diferentes, concluimos que $f(x)$ es discontinua en $x = 2$.

Continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \nexists$$

quedaría un cero en el denominador.

Con esto ya sabemos que la función no puede ser continua en $x = 0$. De todos modos calculamos los límites laterales.

Observemos que cuando nos acercamos a 0, da igual por la derecha que por la izquierda, estamos siempre en la parte inferior de la función, luego:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por otra parte:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

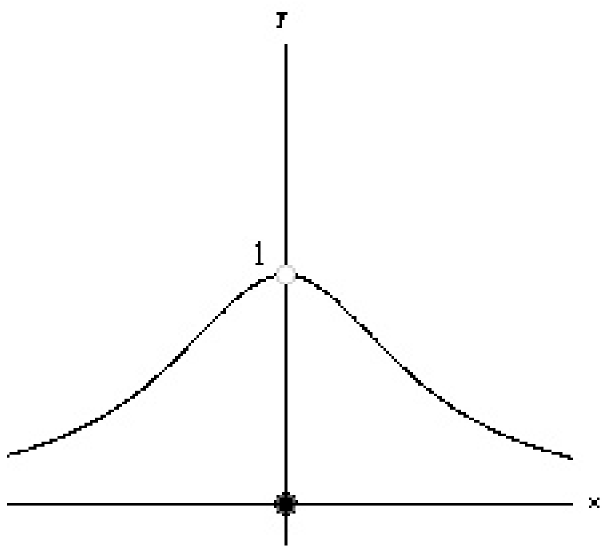
Y $f(x)$ también es discontinua en $x = 0$.

Por tanto $f(x)$ es continua en todos los números reales salvo en $x = 0$ y $x = 2$.

9.6. Tipos de discontinuidad

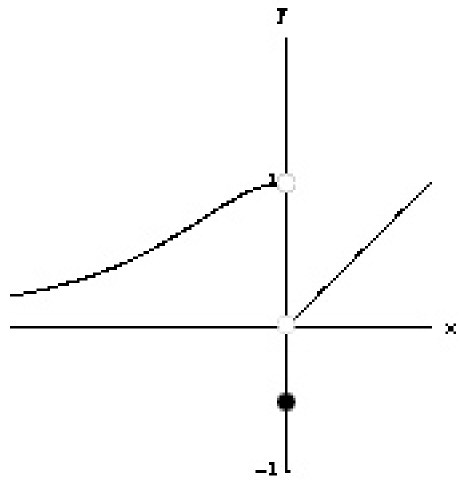
Analicemos los posibles casos que se pueden dar a la hora de estudiar la continuidad de una función en un punto.

1. Existe $f(a)$ y los límites laterales, que son iguales y finitos, pero distintos del valor de $f(a)$. Una discontinuidad de este tipo se denomina *discontinuidad evitable*. Gráficamente:



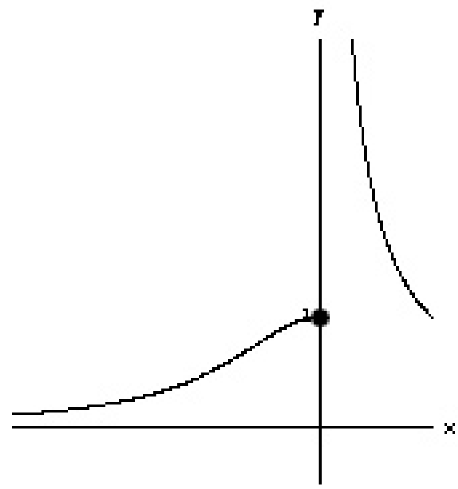
Observamos que los límites por la derecha y por la izquierda valen 1, ambos, mientras que $f(0) = 0$. Hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

2. Existe $f(a)$ y los límites laterales existen y son finitos, aunque distintos. Estamos ante una *discontinuidad de salto finito*. Gráficamente:



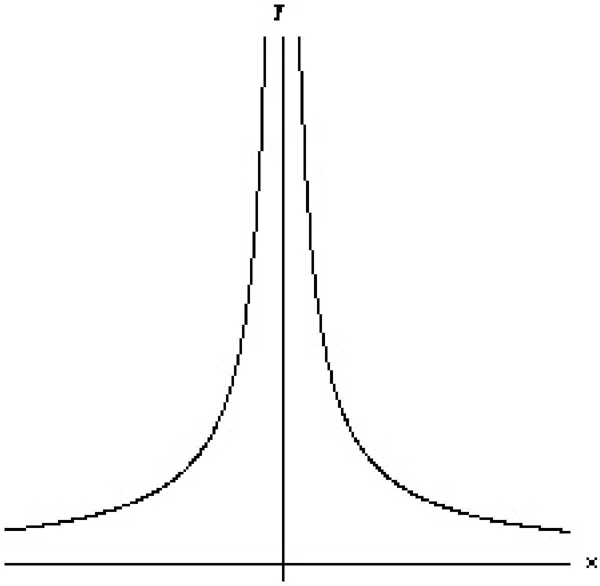
En este caso el límite por la derecha es 1, el izquierdo es 0 y $f(0) = \dfrac{-1}{2}$, hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

3. Existe $f(a)$ y alguno de los límites laterales es infinito. En este caso hay una *discontinuidad de salto infinito*. Gráficamente:



Ahora $f(0) = 1$, el límite por la izquierda vale 1 también y el límite lateral por la derecha vale $+\infty$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

4. No existe $f(a)$ o alguno de los límites laterales. Se trata de una discontinuidad esencial. De forma gráfica:



Los límites laterales, ambos, son $+\infty$, pero $f(0)$ no existe. Hay una discontinuidad esencial en $x = 0$.